УДК 519.3:62-50

Лейфура В.М.

Побудова матриці імпульсних перехідних функцій системи автоматичного регулювання з виродженнями в точці

Запропоновано асимптотику побудови динамічних характеристик сингулярно збуреної системи автоматичного керування у випадку простих коренів характеристичного рівняння.

На відміну від раніш відомих досліджень, в даній роботі розглядається той випадок, коли матриця при похідних стає виродженою в одній точці.

The asymptotic method of construction of dynamic characteristic of singularly activated system automatic control in case of simple roots of characteristic equation is suggested.

Contrary to the widely-known researches this work investigates the case when matrix at derivatives becomes degenerated in one point.

1. Вступ. Постановка задачі

Основними динамічними характеристиками в теорії автоматичного регулювання є матриця імпульсних перехідних функцій та матриця передатних функцій, для побудови яких необхідно знати інтегральну матрицю однорідної системи диференціальних рівнянь [1]. Проте диференціальні рівняння із змінними коефіцієнтами дуже рідко інтегруються у замкненій формі. Тому актуальною задачею є розробка наближених методів побудови інтегральної матриці, зокрема асимптотичних. Для побудови асимптотичних розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами ефективними є методи, розроблені в роботах С.Ф. Фещенко, М.І. Шкіля та учнів їхньої школи [2-5].

Системи автоматичного керування досліджувались за допомогою асимптотичних методів в роботах [1], [4] за умови, якщо кратність коренів характеристичного рівняння зберігається на всьому відрізку інтегрування. В роботі [6] розглядається асимптотичне інтегрування системи автоматичного керування для випадку, коли деякі корені характеристичного рівняння збігаються лише в окремих точках даного проміжку.

В даній роботі, на відміну від попередніх, будується матриця імпульсних перехідних функцій задачі автоматичного керування, яка описується системою диференціальних рівнянь при наявності простих коренів характеристичного рівняння за умови, що виродженість матриці при похідних настає в одній точці. При цьому використаємо ідею роботи [7] та методи, розвинуті в роботах [2-5].

Розглянемо керований процес:

$$\varepsilon t^{P} \frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \tag{1}$$

де $x = x(t)$ – n – вимірний вектор, $A(t)$ – матриця розмірності (n x n), $B(t)$ – матриця розмірності (n x l); u– l – вимірний вектор вхідних сигналів, $\varepsilon > 0$ – малий параметр,

$(0 < \varepsilon \le \varepsilon_0]$, $t \in [0, L]$ – дійсна змінна, $p >> 1$ – натуральне число. При $t = 0$ настає виродженість – коефіцієнт при похідній дорівнює нулю.

2. Асимтотика (за параметром ε) в околі точки виродження

Зауважимо, що для побудови матриці імпульсних перехідних функцій треба знати інтегральну матрицю однорідного рівняння

$$\varepsilon t^P \frac{dx}{dt} = A(t)x, \tag{2}$$

на відрізку $0 \le t < б$ ($б = б(\varepsilon) > 0$ – число, яке буде визначено нижче).

Припустимо, що виконуються такі умови:

1. Матриця $A(t)$ на відрізку [0; L] неперервна і має неперервні похідні до $m+1$ порядку включно ($m \ge p$ – натуральне число);

2. В точці $t = 0$ маємо

$$A^{(p-1)}(0) = A^{(p-2)}(0) = \ldots = A'(0) = A(0) = 0,\ A^{(p)}(0) \ne 0, \tag{3}$$

3. $\lim\limits_{t \to 0} C(t) = \dfrac{A^{(p)}(0)}{p!} = K$, де $C(t) = t^{-p} \cdot A(t)$

(Умова 3° випливає з умов 1°-2°.)

4. Характеристичні числа матриці K прості і їх дійсні частини недодатні. Тоді, надалі розглядатимемо довизначену в точці $t = 0$ систему диференціальних рівнянь, яка буде задана на відрізку [0; L]

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = D(t)x, \tag{4}$$

де

$$D(t) = \begin{cases} C(t), t \in (0; L), \\ K, t = 0. \end{cases}$$

Зазначимо, що матриця $D(t)$ згідно 1° є неперервною на відрізку [0; L] і має неперервні похідні до $m+1$ включно в напівінтервалі (0; L].

Систему диференціальних рівнянь (4) можна подати у вигляді

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = Kx + D_1(t)x, \tag{5}$$

де $D_1(t) = D(t) - K$.

Виконаємо підстановку

$$x = Xy, \tag{6}$$

де $X=X(t, \varepsilon)$ – розв'язок початкової задачі $X(0, \varepsilon)=E$ для матричного рівняння

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = KX, \tag{7}$$

E – одинична матриця.

Рівняння (7) має нормальну фундаментальну систему розв'язків

$$X = exp\left(\frac{1}{\varepsilon} Kt\right), \tag{8}$$

Використовуючи (6), зведемо систему (5) до еквівалентної системи інтегральних рівнянь

$$x = exp\left(\frac{1}{\acute{\varepsilon}\Gamma}Kt\right)C_0 + \frac{1}{\acute{\varepsilon}\Gamma}\int_0^t exp\left(\frac{1}{\acute{\varepsilon}\Gamma}(t-t_1)\right)D_1(t_1)x(t_1\acute{\varepsilon}\Gamma)dt_1, \tag{9}$$

де C_0 – сталий вектор.

Далі виконаємо наступні оцінки деяких матриць за нормою.

Згідно 3°, існує окіл точки $t = 0$, $0 \le t \le \delta$, δ такий, що

$$\forall t \in [0;\acute{a}] \ \ (0 < \acute{a} = \acute{a}(\varepsilon) \le L) \ \ ^3 \ \forall \varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$$

норма матриці $D_1(t)$ задовольняє нерівність

$$\|D_1(t)\| \le \varepsilon^{\alpha} b, \tag{10}$$

де $\alpha > 1$ – довільне дійсне число, $b > 0$ – дійсне число.

Згідно з 4°, існують числа $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, які не залежать від ε і такі, що $\forall t,\ t_1 \in [0;\acute{a}]\ ^3\ \forall \varepsilon \in (0;\varepsilon_1]\ \ (0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0)$ мають місце оцінки

$$\left\| exp\left(\frac{1}{\varepsilon}Kt\right)C_0 \right\| \le c_1, \tag{11}$$

$$\left\| exp\frac{1}{\varepsilon}K(t-t_1) \right\| \le c_2 \cdot \varepsilon^{\alpha}. \tag{12}$$

Таким чином, з урахуванням (11), (12), на підставі (9) дістаємо нерівність

$$\|x\| \le c_1 + \varepsilon_0^{\alpha-1} c_2 \int_0^t \|x(t_1,\varepsilon)\| dt_1, \ \ 0 \le t \le \delta \le L. \tag{13}$$

Тепер скористаємось нижче наведеним твердженням.

<u>*Лема.*</u> Якщо для всіх $t \in [0;\frac{L}{\varepsilon}]$ справджується нерівність

$$r(t) \le c\int_0^t r(s)ds + f(t),$$

де $c > 0$ стала, $f(t)$ – диференційована функція на відрізку $\left[0;\frac{L}{\varepsilon}\right]$, то на цьому відрізку

$$r(t) \le f(0)e^{ct} + \int_0^t f'(s)e^{c(t-s)}ds. \tag{14}$$

Доведення цієї леми можна знайти, наприклад, в [5, с. 340]

Застосовуючи до нерівності (13) наведену лему, дістанемо згідно (14)

$$\|x(t,\varepsilon)\| \le c_1 e^{\varepsilon_0^{\alpha-1} c_2 L}, \tag{15}$$

де $0 \le t \le \delta \le L,\ 0 < \varepsilon \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$, $\|x\|$ – норма вектора $\boldsymbol{x}$,

а тому

$$\left\| \int_0^t exp\left(\frac{1}{\varepsilon}K(t-t_1)\right)D_1(t_1)x(t_1,\varepsilon)dt_1 \right\| \le \varepsilon^{\alpha-1} c_2 c_1 L \cdot e^{\varepsilon_0^{\alpha-1}\cdot c_2 L}.$$

Отже, розв'язок системи диференціальних рівнянь (4) на відрізку $[0;\delta] \subset [0;L]$ можна зобразити у вигляді асимптотичної (за параметром ε) формули:

$$x(t,\varepsilon) = exp\left(\frac{1}{\varepsilon}Kt\right)C_0 + O(\varepsilon^{\alpha-1}), \tag{16}$$

$\alpha > 1$ – довільне дійсне число.

Розв'язок (16) є загальним розв'язком однорідної системи (4), оскільки він містить

довільний сталий вектор C_0.

Тому матриця

$$X_0(t,\varepsilon)=exp\left(\frac{1}{\varepsilon}Kt\right)$$

з точністю до $O(\varepsilon^{\alpha-1})$ є інтегральною матрицею для системи (4) на відрізку $[0;\delta]$, тобто інтегральна матриця цієї системи має вигляд

$$X(t,\varepsilon)=exp\left(\frac{1}{\varepsilon}Kt\right)+O(\varepsilon^{\alpha-1}).$$

Використовуючи формулу

$$(A+B)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}(E+BA^{-1})BA^{-1},$$

дістанемо вираз для оберненої матриці

$$X^{-1}(t,\varepsilon)=exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}Kt\right)+O(\varepsilon^{\alpha-1}).$$

Оскільки матриця імпульсних перехідних функцій для системи (1) задається формулою [4]

$$G(t,\xi,\varepsilon)=X(t,\varepsilon)X^{-1}(\xi,\varepsilon)\ B(\xi), \tag{17}$$

то на відрізку $[0;\delta]\subset[0,L]$ дістанемо асимптотичну форму для матриці імпульсних перехідних функцій регулятора на відрізку $[0;\delta]$.

$$G(t,\xi,\varepsilon)=exp(\frac{1}{\varepsilon}Kt)exp(-\frac{1}{\varepsilon}K\xi)B(\xi)+O(\varepsilon^{\alpha-1}). \tag{18}$$

3. Асимптотика (за параметром ε) на відрізку $[\delta;L]$

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon\frac{dx}{dt}=C(t)x,\ t\in[\delta;L]. \tag{19}$$

Припускатимемо, що характеристичне рівняння

$$det||C(t)-\lambda||=0 \tag{20}$$

на відрізку $[\delta;L]$ має прості корені $\lambda_1(t),...,\lambda_n(t)$.

Тоді [5] для матриці $C(t)$ існує неособлива матриця $T(t)$, яка, згідно з 1^0, на відрізку $[\delta;L]$ має неперервні похідні порядку до $m+1$ включно, і така, за якої на відрізку $[\delta;L]$ справджується рівність

$$T^{-1}(t)\ C(t)\ T(t)=\Lambda(t), \tag{21}$$

де

$$\Lambda(t)=diag(\lambda_1(t),...,\lambda_n(t), \tag{22}$$

$T^{-1}(t)$ – матриця обернена до матриці $T(t)$. Розв'язок системи (19) будемо шукати у вигляді

$$x(t,\varepsilon)=U_m(t,\varepsilon)y(t,\varepsilon), \tag{23}$$

де $U_m(t,\varepsilon)-(n\times n)$ матриця, $U_m(t,\varepsilon)=\sum\limits_{s=0}^{m}\varepsilon^s U_s(t)$, $y(t,\varepsilon)$ – n-вимірний вектор.

Підставляючи вектор (23) у систему (19), дістанемо

$$\varepsilon\ U_m(t,\varepsilon)\frac{dy}{dt}=\left(C(t)U_m(t,\varepsilon)-\varepsilon U'_m(t,\varepsilon)\right)y. \qquad (24)$$

Матриці $U_s(t,\varepsilon).\ (s=0,1,...,m)$, згідно із [3], визначатимемо виходячи з матричної рівності:

$$C(t)U_m(t,\varepsilon)-\varepsilon U'_m(t,\varepsilon)=U_m(t,\varepsilon)(\Lambda_m(t,\varepsilon)+\varepsilon^{m+1}R_m(t,\varepsilon)), \qquad (25)$$

де $\Lambda_m(t,\varepsilon)=\sum\limits_{s=0}^{m}\varepsilon^s\Lambda_s(t)$ - діагональна матриця, $R_m(t,\varepsilon)-(n\times n)$ матриця з неперервними елементами на відрізку $[\delta;L]$. Тоді, порівнюючи в (25) коефіцієнти при однакових степенях параметра $\varepsilon\ (s=0,1,...,m)$, прийдемо до системи рівнянь:

$$\begin{cases} C(t)U_0(t)-U_0(t)\Lambda_0(t)=0, \\ C(t)U_s(t)-U_s(t)\Lambda_0(t)=U_0(t)\Lambda_s(t)+F_s(t), \\ F_s(t)=U'_{s-1}(t)+\sum\limits_{i=1}^{s-1}U_i(t)\Lambda_{s-i}(t),\ s=\overline{1,m}, \\ U_m(t,\varepsilon)\cdot R_m(t,\varepsilon)=H(t,\varepsilon), \end{cases}$$

де $H(t,\varepsilon)=-\left(U'_m(t)+\sum\limits_{k=0}^{m-1}\varepsilon^k\sum\limits_{j=k+1}^{m}U_j(t)\Lambda_{m+k+1-j}(t)\right)$.

Розв'язуючи матричну систему рівнянь методом [3], знаходимо:

$U_0(t)=T(t),\ \Lambda_0(t)=\Lambda(t),\ U_S(t)=T(t)Q_S(t),$

$\Lambda_S(t)=-diag(f_{S11}(t),...,f_{Snn}(t)),$ де елементи матриці $Q_S(t)$ визначаються так:

$q_{Sij}(t)=\dfrac{f_{Sij}(t)}{\lambda_j(t)-\lambda_i(t)}, i\neq j;\ q_{Sii}\equiv 0,\ i,j=\overline{1,n},\ s=\overline{1,m},$

f_{sij} - елементи матриць $F_s(t),\ R_m(t,\varepsilon)=U_m^{-1}(t,\varepsilon)H(t,\varepsilon).$

Тоді систему диференціальних рівнянь (24) на відрізку $[\delta;L]$, згідно з (25) можна записати у вигляді:

$$\varepsilon\frac{dy}{dt}=\left(\Lambda_m(t,\varepsilon)+^{m+1}R_m(t,\varepsilon)\right)y. \qquad (26)$$

Розглянемо матричну систему диференціальних рівнянь:

$$\varepsilon\frac{dY(t,\varepsilon)}{dt}=\Lambda_m(t,\varepsilon)Y(t,\varepsilon).$$

Оскільки її інтегральна матриця має вигляд

$$Y(t,\varepsilon)=exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\delta^t\Lambda_m(t_1,\varepsilon)dt_1\right),$$

то систему (26) можна замінити еквівалентною системою інтегральних рівнянь:

$$y(t,\varepsilon)=exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\delta^t\Lambda_m(t_1,\varepsilon)dt_1\right)C_\delta+\varepsilon^m\int_\delta^t exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_1}^t\Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau\right)R_m(t_1,\varepsilon)y(t_1,\varepsilon)dt, \qquad (27)$$

де C_δ - сталий вектор.

Надалі припускатимемо, при $\forall t\in[\delta;L]$ виконується умова:

$$Re\,\lambda_i(t)\leq 0,\ i=\overline{1,n}. \qquad (28)$$

Тому, згідно з [5] існують сталі числа $c_3>0,\ c_4>0,\ c_5>0$, які не залежать від ε, і

такі, при яких $\forall t \in [\delta; L]$ виконуються нерівності

$$\left\| exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\delta}^{t}\Lambda_m(t_1,\varepsilon)dt_1\right)C_\delta \right\| \le c_3,$$

$$\left\| exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t}\Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau\right)R_m(t_1,\varepsilon \right\| \le c_4, \tag{29}$$

$$\|U_m(t,\varepsilon)\| \le c_5.$$

Тоді із (27), беручи до уваги (29), дістанемо нерівність

$$\|y(t,\varepsilon)\| \le c_3 + c_4\varepsilon_0^m \int_{\delta}^{t}\|y(t_1,\varepsilon)\|dt_1 \tag{31}$$

Застосовуючи до нерівності (31) наведену вище лему, отримаємо наступну оцінку

$$\|y(t,\varepsilon)\| \le c_3 e^{c_4 L\varepsilon_0^m} \tag{32}$$

для $\forall t \in [\delta; L]$ і $\varepsilon \in (0; \varepsilon_2]$, $(0 < \varepsilon_2 \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_0]$

внаслідок нерівностей (29), (32) маємо

$$\left\| \int_{\delta}^{t} exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_1}^{t}\Lambda_m(\tau,\varepsilon)d\tau\right)R_m(t_1,\varepsilon)y(t_1,\varepsilon) \right\| \le c_4 c_3 L e^{C_4 L\varepsilon_0^m}. \tag{33}$$

Таким чином для вектора $y(t,\varepsilon)$ в області $t \in [\delta; L]$ на підставі (27) правильною є асимптотична (за параметром ε) формула

$$y(t,\varepsilon) = exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\delta}^{t}\Lambda_m(t_1,\varepsilon)dt_1\right)C_\delta + O(\varepsilon^m). \tag{34}$$

Нарешті, беручи до уваги (30), згідно з (23), для вектор-розв'язку $x(t,\varepsilon)$ системи диференціальних рівнянь (19) отримаємо асимптотичну формулу:

$$x(t,\varepsilon) = U_m(t,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\delta}^{t}\Lambda_m(t_1,\varepsilon)dt_1\right)C_\delta + O(\varepsilon^m) \tag{35}$$

Розв'язок (35) є загальним розв'язком однорідної системи (19), оскільки він містить довільний сталий вектор C_δ. Тому інтегральна матриця системи (19) має вигляд

$$X(t,\varepsilon) = U_m(t,\varepsilon)exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\delta}^{t}\Lambda_m(t_1,\varepsilon)dt_1\right) + O(\varepsilon^m). \tag{36}$$

Для оберненої матриці, аналогічно як і в пункті 2, дістанемо вираз:

$$X^{-1}(t,\varepsilon) = exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\delta}^{t}\Lambda_m(t_1,\varepsilon)dt_1\right)\cdot U_m^{-1}(t,\varepsilon) + O(\varepsilon^m). \tag{37}$$

Тоді, згідно з (17), на підставі (36), (37) дістанемо асимптотичну формулу для матриці імпульсних перехідних функцій регулятора на відрізку $[\delta; L]$:

$$G(t,\xi,\varepsilon) = U_m(t,\varepsilon)exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{\delta}^{t}\Lambda_m(t_1,\varepsilon)dt_1\right)\cdot$$

$$\cdot exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_{\delta}^{\xi}\Lambda_m(\xi_1,\varepsilon)d\xi_1\right)U_m^{-1}(\xi,\varepsilon)B(\xi) + O(\varepsilon^m).$$

Зауваження 1: оскільки число $\alpha > 1$ – довільне, то для рівномірної асимптотики за параметром ε на всьому відрізку $[0; L]$ досить у формулі (18) покласти $\alpha = m+1$.

Зауваження 2: матриця передатних функцій може бути знайдена за формулою:

$$W(\lambda,t,\varepsilon)=\int_0^{+\infty}G(s,t-s,\varepsilon)e^{-\lambda s}ds.$$

Література

1. Абгарян К. А. Матричные и асимптотические методы в теории линейных систем. – М: Наука, 1973. – 432 с.
2. Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д. Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. – К: Наукова думка, 1966. – С. 252.
3. Шкіль М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. – К: Вища шк. 1971. – 228с.
4. Шкиль Н. И., Вороной А. Н., Лейфура В. Н. Асимптотические методы в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях. – К: Вища шк. 1985. – 248 с.
5. Шкіль М. І., Лейфура В. М., Самусенко П. Ф. Диференціальні рівняння. – К.: Техніка, 2003. – 368 с.
6. Лейфура В. М. Асимптотичне інтегрування системи автоматичного керування при наявності точок повороту. Наукові праці: науково-методичний журнал.- Т. 35.- Вип. 22. Комп'ютерні технології. Системний аналіз. Моделювання. – Миколаїв: Вид-во МДГУ ім. П. Могили, 2004. – С. 87-93.
7. Шкіль М. І. Про асимптотичні розвинення розв'язків сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженням у точці та дробовим рангом. Одинадцята міжнародна наукова конф. імені акад. М. Кравчука, 18-20 трав. 2006 р. Київ: Матеріали конф. – К.: ТОВ "Задруга", 2006. – С.296.